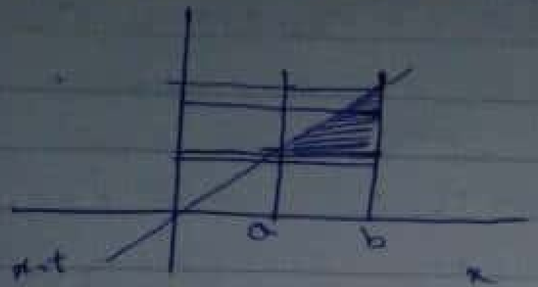
معادلة فولتيرا التكاملية ، تحويلات لابلاس ، تطبيقاتها على المعادلات التكاملية



$$g(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\,g(t)\,dt \quad \text{--- (1)}$$

إن هذه المعادلة هي حالة خاصة من معادلة فريدهولم التكاملية حيث يكون $K(x,t)=0$ عندما $t>x$

لنفرض أن g المفروضة مستمرة $f(x)$ على المجال $b\geq x\geq a$
أي كمول دكمول معرفة على المجال $[a,b]$ وأن النواة $K(x,t)$ مستمرة
في المثلث D المحدد بالمستقيمات $x=t$ ، $t=a$ ، $x=b$.
وعلى محيطه ولكن بذلك $K(x,t)=0$ عندما $t>x$.
وهنا تعاني النواة انقطاعات النوع الأول على القطر $t=x$. إذا كانت
$K(x,x)\neq 0$ ولكن رغم هذا فإن النظريات الأساسية تصح في فريدهولم
التي تمت دراستها في المعادلة فريدهولم التكاملية. كل معادلة فولتيرا
التكاملية (1) يمكن ردها إلى معادلة فريدهولم بتعريف:

$$K_1(x,t)=\begin{cases}K(x,t) ; & t\leq x\\ 0 ; & t>x\end{cases}$$

أي معادلة فولتيرا التكاملية تكتب على الشكل:

$$g(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K_1(x,t)\,g(t)\,dt$$

$$g(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\,g(t)\,dt+\int_x^b 0\,dx$$

أوجد حل معادلة فولتيرا التكاملية الآتية:

$$g(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\,g(t)\,dt \quad \text{--- (1)}$$

- طريقة التقريبات المتتالية.

الحل :

$$g(x) = g_0(x) + \lambda g_1(x) + \lambda^2 g_2(x) + \dots + \lambda^n g_n(x) + \dots \quad (2)$$

وسوف نفرض مؤقتاً أن هذه السلسلة متقاربة (وسوف نثبت أن هذه السلسلة متقاربة).

نبدل العلاقة (2) في (1) نحصل على:

$$g_0(x) + \lambda g_1(x) + \lambda^2 g_2(x) + \dots + \lambda^n g_n(x) + \dots =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) \left[g_0(t) + \lambda g_1(t) + \dots + \lambda^n g_n(t) \right] dt$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\, g_0(t)\,dt + \lambda^2 \int_a^x g_1(t)\, k(x,t)\,dt$$

$$+ \dots + \lambda^3 \int_a^x k(x,t)\, g_2(t)\,dt$$

$$g_0(x) = f(x)$$

$$g_1(x) = \int_a^x k(x,t)\, g_0(t)\,dt$$

$$g_2(x) = \int_a^x k(x,t)\, g_1(t)\,dt$$

$$\boxed{g_n(x) = \int_a^x k(x,t)\, g_{n-1}(t)\,dt \quad ; \quad n = 1, 2, \dots}$$

وسوف نثبت الآن أن السلسلة (2) متقاربة.

من الممكن أن نكتب في حالة التوابع المستمرة في مجال S (مربع) نحدد المتراجحات الآتية:

$$|f(x)| \le m \;,\; |k(x,t)| \le M \quad ; \quad m, M \text{ عددان موجبان}$$

وبالتالي نحصل على المتراجحات الآتية:

$$|g_0(x)| = |f(x)| \le m$$

$$|g_1(x)| \le \int_a^x |k(x,t)|\,|g_0(t)|\,dt \le m.M. \int_a^x dt = m.M(x-a)$$

$$|g_2(x)| \le \int_a^x |k(x,t)|.|g_1(t)|\,dt \le M \int_a^x mM(t-a).dt$$

بتعويض في المعادلة (2) نحصل على الحل المطلوب

$$g(x) = e^x + e^x\frac{\lambda x}{1!} + e^x\frac{(\lambda x)^2}{2!} + e^x\frac{(\lambda x)^3}{3!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$g(x) = e^x\left(1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda x)^n}{n!} + \cdots\right)$$

$$= e^x \cdot e^{\lambda x} = e^{(1+\lambda)x}$$

طريقة ثانية لإيجاد حل معادلة فولتيرا التكاملية، وذلك بالاعتماد على التابع الحال (النواة الحالة)

حل المعادلة يعطى بالدستور التالي

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t,\lambda)\, f(t)\,dt$$

$$R(x,t,\lambda) = K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t)$$

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_n(x,t) = \int_t^x K_{n-1}(x,t_1)\, K(t_1,t)\,dt_1 \quad , n = 2,3,\cdots$$

إيجاد حل التطبيق السابق بالاعتماد على التابع الحال:

ملاحظة:

لا توجد قيم خاصة لمعادلة فولتيرا التكاملية. وبالتالي المعادلة المتجانسة لمعادلة فولتيرا التكاملية لا تملك سوى الحل الصفري.

Date: / / Subject:

نبدأ في العلاقة (2) نحصل على الحل المطلوب.

$$g(x) = e^x + e^x\frac{\lambda x}{1!} + e^x\frac{(\lambda x)^2}{2!} + e^x\frac{(\lambda x)^3}{3!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$g(x) = e^x\left(1 + \frac{\lambda x}{1!} + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda x)^n}{n!} + \cdots\right)$$

$$= e^x \cdot e^{\lambda x} = e^{(1+\lambda)x}$$

طريقة ثانية لإيجاد حل معادلة فولتيرا التكاملية. وذلك بالاعتماد على التابع الحال (النواة الحالة)

حل المعادلة يعطى بالدستور التالي

$$g(x) = f(x) + \lambda\int_a^x R(x,t,\lambda)\, f(t)\,dt$$

$$R(x,t,\lambda) = K_1(x,t) + \lambda K_2(x,t) + \lambda^2 K_3(x,t) + \cdots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t)$$

$$K_1(x,t) = K(x,t)$$

$$K_n(x,t) = \int_a^x K_{n-1}(x,t_1)\, K(t_1,t)\,dt_1 \quad , \quad n = 2,3,\cdots$$

أعد حل التطبيق السابق بالاعتماد على التابع الحال:

ملاحظة:

لا توجد قيم لـ λ مميزة لمعادلة فولتيرا التكاملية. وبالتالي المعادلة المتجانسة لمعادلة فولتيرا التكاملية لا تملك سوى الحل الصفري.

$$|g_2(x)| \leq m.M^2 \left.\frac{(t-a)^2}{2}\right|_a^x = m.\frac{[M(x-a)]^2}{2!}$$

$$|g_n(x)| \leq m.\frac{[M(x-a)]^n}{n!}$$

$$|\lambda^n . g_n(x)| \leq m.\frac{(|\lambda| . M(x-a))^n}{n!}$$

فإذا تحولت x على المجال المحدد $[a,b]$ فإن القيم المطلقة لحدود السلسلة 2 لا تتجاوز الأعداد الموجبة $m\frac{(|\lambda| M(b-a))^n}{n!}$ التي تشكل سلسلة متقاربة مهما تكن قيمة λ، وعليه فإن السلسلة (2) متقاربة مطلقاً وبانتظام في المجال $[a,b]$ ذات مجموعها $g(x)$ هو تابع مستمر ويحقق المعادلة التكاملية (1)، وهو المطلوب.

تطبيق:

أوجد حل المعادلة التكاملية:

$$g(x) = e^x + \lambda \int_0^x e^{x-t} g(t).dt \quad \text{--- (1)}$$

وذلك بالاعتماد على طريقة التقريبات المتتالية.

الحل:

حل المعادلة يعطى بالسلسلة

$$g(x) = g_0(x) + \lambda g_1(x) + \dots + \lambda^n g_n(x) \quad \text{--- (2)}$$

حيث أن:

$$g_0(x) = f(x) = e^x$$

$$g_n(x) = \int_a^x k(x,t) g_{n-1}(t)\, dt \quad ; n = 1, 2, \dots$$

$$g_1(x) = \int_0^x e^{x-t} . e^t . dt = e^x . \int_0^x dt = e^x . \frac{x}{1!}$$

$$n=2 \Rightarrow g_2(x) = \int_0^x e^{x-t} . e^t . t\, dt = e^x \int_0^x t\, dt = e^x \frac{x^2}{2!}$$

$$n=3 \Rightarrow g_3(x) = \int_0^x e^{x-t} . e^t \frac{t^2}{2!} .dt = \frac{e^x}{2!} . \int_0^x t^2\, dt = \frac{e^x . x^3}{3!}$$

Sabbagh

تطبيق: أوجد حل المعادلة السابقة بالاعتماد على تابع الحل.

الحل

الحل يعطى بالدستور

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda)\, k(x,t)\, dt$$

$$= e^x + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda)\, e^t\, dt \quad \text{---} (2)$$

$$k_1(x,t) = k(x,t) = e^{x-t}$$

$$k_n(x,t) = \int_t^x k_{n-1}(x,t_1)\, k(t_1,x)\, dt_1$$

$$k_2(x,t) = \int_t^x e^{x-t_1} \cdot e^{t_1-t}\, dt_1 = e^{x-t}(x-t)$$

$$k_3(x,t) = \int_t^x e^{x-t_1} (x-t_1) \cdot e^{t_1-t}\, dt_1$$

$$k_3(x,t) = e^{x-t} \int_t^x (x-t)\, dt_1 = -e^{x-t} \cdot \int_t^x (t_1-x)\, dt_1$$

$$= -e^{x-t} \cdot \frac{(t_1-x)^2}{2}\Big|_t^x = e^{x-t} \frac{(t-x)^2}{2} = e^{x-t} \cdot \frac{(t-x)^2}{2!}$$

$$R(x,t,\lambda) = e^{x-t} + \lambda\, e^{(x-t)} \frac{(x-t)}{1!} + \lambda^2\, e^{(x-t)} \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots$$

$$= e^{x-t}\left[1 + \frac{\lambda(x-t)}{1!} + \frac{[\lambda(x-t)]^2}{2!} + \dots\right]$$

$$= e^{x-t} \cdot e^{\lambda(x-t)} \quad ; \; t < x$$

$$R(x,t,\lambda) = 0 \quad , \; t > 0$$

نبدل في المعادلة 2 نحصل على

$$g(x) = e^x + \lambda \int_t^x e^{x-t} \cdot e^{\lambda(x-t)} \cdot e^t\, dt$$

$$= e^x + \lambda \int_0^x e^{x+\lambda x - \lambda t}\, dt$$

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} f(x)\,dx \quad \text{—— (3)}$$

البرهان:

إن البداء $e^{-\sigma x} g(x)$ يحقق الشروط المذكورة التي يخضع لها التابع $g(x)$ والتكامل المعرف العرفة له متقارب إطلاقاً من الفرض وبالتالي دستور فورييه قابل للتطبيق على التابع $e^{-\sigma x} g(x)$ وذلك كما يلي:

لنا دستور فورييه

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty} f_1(\alpha)\, e^{-\alpha x i}\, d\alpha$$

على أن

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{\alpha x i}\, dx$$

نبدل $f_1(\alpha)$ في دستور فورييه نحصل على:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x i}\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{\alpha t i}\, dt$$

نبدل في العلاقة الأخيرة كل $f(x)$ بـ $e^{-\sigma x} g(x)$ نجد أن:

$$e^{-\sigma x} g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x i}\, d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma t} g(t)\, e^{\alpha t i}\, dt$$

$$e^{-\sigma x} g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x i}\, d\alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sigma-\alpha i)t}\, g(t)\, dt}_{f(\sigma-\alpha i)}$$

وبالاعتماد على العلاقة (2) حيث $s = \sigma - \alpha i$ نحصل على

$$e^{-\sigma x} g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x i} f(\sigma - \alpha i)\, d\alpha$$

ولنجري تغيير المتحول من α إلى s نجد:

$$s = \sigma - \alpha i$$

$$ds = -i\,d\alpha \Rightarrow d\alpha = -\frac{1}{i}\,ds$$

$$-\alpha i = s - \sigma$$

$$\alpha = -\infty \Rightarrow s = \sigma + i\infty$$

$$\alpha = +\infty \Rightarrow s = \sigma - i\infty$$

نبدل نحصل على:

$$e^{-\sigma x} g(x) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\sigma+i\infty}^{\sigma-i\infty} e^{(s-\sigma)x} f(s)\, ds$$

وبقلب التكامل واختصار طرفي العلاقة على $e^{-\sigma x}$

$$g(x) = +\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{sx} f(s)\, ds$$

نستبدل العلاقة كل x بـ s وكل s بـ x نحصل على العلاقة (3)

Date : / / Subject:

$$= e^{x} + \lambda \cdot e^{(1+\lambda)x} \int_{0}^{x} e^{-\lambda x}$$

$$g(x) = e^{x} + \lambda \cdot e^{(1-\lambda)x} \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \right]_{0}^{x}$$

$$= e^{x} - e^{(1+\lambda)x} \cdot (e^{-\lambda x} - 1)$$

$$= e^{x} - e^{x} + e^{(1+\lambda)x} = e^{(1+\lambda)x}$$

تحويل لابلاس :

تعريف

اذا كان $f_1(x)$ معرف في $-\infty < x < \infty$ مستمر أو اذا حقق شرط ديرخلي في كل مجال محدود وإذا كان بالقيمة المطلقة

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)| dx \quad — (1)$$

عندئذ نسمي التابع

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \cdot e^{\alpha x i} \cdot d(x) \quad — (2)$$

تحول فورييه للتابع $f_1(x)$

وأيضاً يصح المستوى العكسي الآتي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\alpha) e^{-\alpha x} d\alpha$$

والقوانين للتطبيق النظري

على أن نفهم التكامل الأخير بمعنى القيمة الرئيسية

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \lim_{\mu \to \infty} \int_{-\mu}^{\mu} f_1(\alpha) e^{-\alpha x} d\alpha$$

دراسة تحويل لابلاس :

نظرية 1

نفرض أن التابع $g(x)$ مستمر في المجال $(-\infty, +\infty)$ وله مشتق من المرتبة الأولى في كل نقطة والتكامل

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x} \cdot g(x) \cdot dx \quad — (1)$$

متقارب اطلاقاً عندما $\alpha < \sigma < \beta$ حيث α, β عددان حقيقيان ثابتان . نفرض أن :

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx} \cdot g(x) ds \quad — (2)$$

[illegible] فانه أن نثبت :

Sabbagh